Le problème est constitué de quatre parties. Les définitions sont écrites en gras et servent dans tout le problème. La partie III dépend largement des résultats des parties I et II. Ce n'est pas le cas de la partie IV qui peut être traitée indépendamment.

On désignera par $\mathbf{R}$ le corps des réels et par $\mathbf{C}$ celui des complexes. Les parties réelles et imaginaires d'un nombre complexe z seront notées $\Re z$ et $\Im z$. Son conjugué est noté $\bar{z}$. L'argument d'un nombre complexe non nul z sera noté $\mathrm{Arg}(z)$, c'est un élément de l'intervalle $[0, 2\pi[$. Si p est un nombre premier, on notera $\mathbf{F}_p$ le corps fini à p éléments.

Si x est un réel, on notera $[x]$ sa partie entière, c'est le plus grand entier $n \leq x$.

Soient A, B et C trois groupes abéliens. On appellera forme biadditive de $A \times B$ dans C une application f de $A \times B$ dans C qui vérifie les conditions suivantes :

$$\forall a \in A, \forall a' \in A, \forall b \in B \quad f(a+a', b) = f(a, b) + f(a', b)$$

$$\forall a \in A, \forall b \in B, \forall b' \in B \quad f(a, b+b') = f(a, b) + f(a, b')$$

I Formes sesquilinéaires symétriques

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{C}$. On appelle **forme sesquilinéaire** sur E une forme biadditive b de $E \times E$ dans $\mathbf{C}$ vérifiant les conditions suivantes :

$$\forall \lambda \in \mathbf{C}, \forall x \in E, \forall y \in E \quad b(\lambda x, y) = \lambda b(x, y) \quad b(x, \lambda y) = \overline{\lambda} b(x, y)$$

Un telle forme b est dite **symétrique** si l'on a :

$$\forall x \in E, \forall y \in E \quad b(x, y) = \overline{b(y, x)}$$

Une forme b sesquilinéaire symétrique sur E est dite **définie positive** (resp. **définie négative**) sur un sous-espace vectoriel F de E si pour tout vecteur non nul x de F, $b(x, x)$ est un réel strictement positif (resp. strictement négatif).

On appellera **espace sesquilinéaire** un couple (E, b) où b est une forme sesquilinéaire sur un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbf{C}$. Un espace sesquilinéaire (E, b) est dit **symétrique** si la forme b est symétrique.

Si (E, b) est un espace sesquilinéaire symétrique, l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F de E est noté $F^{\perp}$. C'est l'ensemble des vecteurs $x \in E$ tels que $b(x, y) = 0$ pour tout $y \in F$.

Une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ d'un espace sesquilinéaire symétrique (E, b) est dite orthogonale si $b(e_i, e_j)$ est nul pour tous $i \neq j$. On dira qu'elle est semi-orthonormée si elle est orthogonale et si de plus $b(e_i, e_i)$ est, pour tout i, égal à 1, 0 ou -1.

1) Soit (E, b) un espace sesquilinéaire symétrique. On suppose b non nulle. Montrer qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que $b(x, x)$ soit non nul. Montrer qu'il existe un vecteur $y \in E$ tel que $b(y, y)$ soit égal à 1 ou à -1.

2) Soit (E, b) un espace sesquilinéaire symétrique. Montrer qu'il existe une base semi-orthonormée de (E, b).

3) On suppose que E est l'espace vectoriel $\mathbf{C}^2$ et que la forme b est définie par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Construire une base semi-orthonormée de (E, b).

4) Soit (E, b) un espace sesquilinéaire symétrique. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base semi-orthonormée de (E, b). Soit E_+ (resp. E_-, E_0) le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs e_i vérifiant $b(e_i, e_i) = 1$ (resp. $b(e_i, e_i) = -1$, $b(e_i, e_i) = 0$). Soit F un sous-espace vectoriel de E.

a) Montrer que $F \cap (E_- \oplus E_0)$ est nul si b est définie positive sur F et que $F \cap (E_+ \oplus E_0)$ est nul si b est définie négative sur F.

b) En déduire que le nombre $\sum_i b(e_i, e_i)$ est indépendant de $\mathcal{B}$. Ce nombre sera noté $\sigma(E, b)$ ou simplement $\sigma(E)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

5) Soient $n > 0$ un entier et E l'espace vectoriel $\mathbf{C}^n$ muni de sa base canonique $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Soit b la forme sesquilinéaire sur E vérifiant :

$$b(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i + j = n + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer le nombre $\sigma(E)$.

6) Soit (E, b) un espace sesquilinéaire symétrique. Soit x un vecteur non nul de E.

a) On suppose que x appartient à $E^\perp$. Montrer qu'il existe une base semi-orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ telle que : $x = e_1$.

b) On suppose que $b(x, x)$ est non nul. Montrer qu'il existe une base semi-orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et un réel $\lambda > 0$ tels que : $x = \lambda e_1$.

c) On suppose que $b(x, x)$ est nul et que x n'appartient pas à $E^\perp$. Montrer qu'il existe une base semi-orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ telle que : $x = e_1 + e_2$.

7) Soit (E, b) un espace sesquilinéaire symétrique. Soit $F = \mathbf{C}x$ le sous-espace vectoriel de E engendré par un vecteur non nul $x \in E$ et $G = F^\perp$ son orthogonal. Déterminer l'espace G suivant les cas examinés dans la question 6. Montrer que l'on a dans tous les cas : $\sigma(E) = \sigma(F) + \sigma(G)$.

8) Soit (E, b) un espace sesquilinéaire symétrique. Soit F un sous-espace vectoriel de E et $G = F^\perp$ son orthogonal. Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une base semi-orthonormée de (F, b). Pour tout $i \leq p$ notons F_i le sous-espace vectoriel engendré

par les vecteurs u_j, $j \leq i$, et G_i l'orthogonal $F_i^\perp$ de F_i. Déterminer (en fonction de $\sigma(E)$) les nombres $\sigma(F_i) + \sigma(G_i)$. En déduire la formule :

$$\sigma(E) = \sigma(F) + \sigma(F^\perp)$$

II Espaces sesquilinéaires

Soit (E, b) un espace sesquilinéaire. Si F est un sous-espace vectoriel de E, on appellera **orthogonal à droite** (resp. **orthogonal à gauche**) de F l'ensemble noté $F^\perp$ (resp. ${}^\perp F$) des vecteurs x de E qui vérifient :

$$\forall y \in F \quad b(y, x) = 0 \quad (\text{resp. } \; b(x, y) = 0)$$

On dira que la forme b est **non dégénérée** si $E^\perp$ et ${}^\perp E$ sont nuls. Si F est un sous-espace vectoriel de E, on dira que b est non dégénérée sur F si la restriction de b à F est non dégénérée.

1) Soit (E, b) un espace sesquilinéaire. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E. Soit M la matrice de b dans cette base, c'est-à-dire la matrice dont les coefficients sont les nombres $b(e_i, e_j)$.

a) Soient x et y deux vecteurs de E et X et Y les matrices colonnes ayant comme coefficients les coordonnées de x et y dans la base $\mathcal{B}$. Montrer la formule :

$$b(x, y) = {}^tXM\overline{Y}$$

${}^tX$ étant la transposée de X et $\overline{Y}$ la matrice colonne dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de Y.

b) Montrer que b est non dégénérée si et seulement si M est inversible.

c) Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

— b est non dégénérée

— $E^\perp = \{0\}$

— ${}^\perp E = \{0\}$.

2) Soit (E, b) un espace sesquilinéaire. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

a) Montrer que $F^\perp$ et ${}^\perp F$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

b) Montrer les inégalités :

$$\dim F + \dim F^\perp \geq \dim E \qquad \dim F + \dim {}^\perp F \geq \dim E$$

Montrer que ces inégalités sont des égalités si b est non dégénérée (sur E).

c) On suppose que b est non dégénérée sur F. Montrer les égalités :

$$E = F \oplus F^\perp = F \oplus {}^\perp F$$

3) Soit E l'espace vectoriel $\mathbf{C}^2$ muni de sa base canonique (e_1, e_2). Soit b la forme sesquilinéaire sur E vérifiant :

$$\forall i \in \{1,2\} \quad b(e_i, e_1) = 0 \quad \text{et} \quad b(e_i, e_2) = 1$$

Déterminer un sous-espace vectoriel F de E tel que $F^{\perp}$ et ${}^{\perp}F$ n'aient pas la même dimension.

4) Soit (E, b) un espace sesquilinéaire. Montrer qu'il existe un endomorphisme bijectif f de E tel que la forme $(x, y) \mapsto b(f(x), y)$ soit une forme sesquilinéaire symétrique.

5) Soit (E, b) un espace sesquilinéaire. Soit ε un complexe. On dit que b est **ε-symétrique** si l'on a :

$$\forall x \in E, \forall y \in E \quad b(x, y) = \varepsilon\overline{b(y, x)}$$

On dira dans ce cas que (E, b) est **ε-symétrique**.

a) Montrer que si la forme b est ε-symétrique et non nulle, on a : $\varepsilon\overline{\varepsilon} = 1$.

b) Soit ε un nombre complexe tel que $\varepsilon\overline{\varepsilon} = 1$. Donner un exemple d'espace sesquilinéaire (E, b) où b est ε-symétrique et non nulle.

6) Soit ε un nombre complexe tel que $\varepsilon\overline{\varepsilon} = 1$. Soit (E, b) un espace sesquilinéaire ε-symétrique.

a) Montrer qu'il existe un nombre complexe α non nul tel que αb soit une forme sesquilinéaire symétrique.

b) Soit β un nombre complexe non nul. Déterminer à quelle condition (portant sur α et β) la forme βb est symétrique. Déterminer (en fonction de $\sigma(E, \alpha b)$, de α et de β) le nombre $\sigma(E, \beta b)$.

III Espaces semiquadratiques

Soit α un nombre complexe non nul. On pose $\varepsilon = \dfrac{-\alpha}{\overline{\alpha}}$. On appelle espace **$\alpha$-semiquadratique** un triplet (E, b, f) où E est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{C}$, b une forme sesquilinéaire sur E **non dégénérée** et f une forme linéaire sur E et tel que l'on ait :

(SQ) $$\forall x \in E, \forall y \in E \quad b(x, y) - \varepsilon\overline{b(y, x)} = \alpha f(x)\overline{f(y)}.$$

On pourra abréger l'expression α-semiquadratique en l'expression α-SQ.

Un espace α-semiquadratique (E, b, f) sera dit de **type T0** si f est nul et de **type T1** sinon.

Soient $\mathcal{E} = (E, b, f)$ et $\mathcal{E}' = (E', b', f')$ deux espaces α-semiquadratiques. On appellera **isomorphisme** de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}'$ une application linéaire bijective φ de E sur E' ayant les propriétés suivantes :

$$\forall x \in E \quad f'(\varphi(x)) = f(x)$$

$$\forall x \in E, \forall y \in E \quad b'(\varphi(x), \varphi(y)) = b(x, y).$$

On dira que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}'$.

1) Soit (E, b) un espace sesquilinéaire. Soit f une forme linéaire non nulle sur E et u un complexe tel que $u\overline{u} = 1$. On suppose que l'on a :

$$\forall x \in E, \forall y \in E \quad b(x, y) - u\overline{b(y, x)} = \alpha f(x)\overline{f(y)}.$$

Montrer que u est égal à ε.

2.a) Soit $\mathcal{E} = (E, b, f)$ un espace α-semiquadratique. Montrer qu'il existe un unique vecteur $e \in E$ vérifiant la conditions suivante :

$$\forall x \in E \quad b(x, e) = f(x).$$

Ce vecteur sera appelé **vecteur centre** de $\mathcal{E}$.
Soit λ le complexe défini par la formule :

$$f(e) = \frac{1 - \lambda}{\overline{\alpha}}.$$

Montrer que l'on a : $\lambda\overline{\lambda} = 1$.
Cet élément λ sera appelé **poids** de $\mathcal{E}$.
b) Soient $\mathcal{E} = (E, b, f)$ et $\mathcal{E}' = (E', b', f')$ deux espaces α-semiquadratiques isomorphes. Montrer qu'ils ont même poids.
c) Déterminer le vecteur centre et le poids d'un espace α-semiquadratique de type T0.

3) Soit $\mathcal{E} = (E, b, f)$ un espace α-semiquadratique de type T1. Soit e le vecteur centre de $\mathcal{E}$. Soit x un vecteur non nul de E et F l'orthogonal à gauche du sous-espace vectoriel de E engendré par x. Montrer que $\mathrm{Ker} f$ est égal à F si et seulement si x est colinéaire à e. Déterminer l'orthogonal à droite de $\mathrm{Ker} f$.

4) Soit λ un complexe différent de 1 tel que $\lambda\overline{\lambda} = 1$. Montrer qu'il existe une unique forme sesquilinéaire b sur $\mathbf{C}$ telle que $(\mathbf{C}, b, \mathrm{Id})$ soit un espace α-semiquadratique de poids λ.

Montrer que deux espaces α-semiquadratiques de dimension 1 et de type T1 sont isomorphes si et seulement si ils ont même poids.

5) Soit $\mathcal{E} = (E, b, f)$ un espace α-semiquadratique de type T1, de dimension 2 et de poids $\lambda = 1$. Soit e le vecteur centre de $\mathcal{E}$.

a) Soit x un vecteur de E tel que $f(x) = 1$. Montrer que la partie réelle de $b(x,x)/\alpha$ est égale à 1/2.

b) Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que $f(x) = 1$ et $b(x,x) = \dfrac{\alpha}{2}$.

c) En déduire que deux espaces α-semiquadratiques de type T1, de dimension 2 et de poids $\lambda = 1$ sont isomorphes.

6) Soient $\mathcal{E} = (E, b, f)$ et $\mathcal{E}' = (E', b', f')$ deux espaces α-semiquadratiques. Montrer qu'il existe une unique forme sesquilinéaire b'' sur $E'' = E \times E'$ et une unique forme linéaire f'' sur E'' vérifiant les conditions suivantes :

— $\forall x \in E, \forall x' \in E' \quad f''(x, x') = f(x) + f'(x')$
— $\forall x \in E, \forall y \in E \quad b''((x,0),(y,0)) = b(x,y)$
— $\forall x' \in E', \forall y' \in E' \quad b''((0,x'),(0,y')) = b'(x',y')$
— $\forall x \in E, \forall y' \in E' \quad b''((x,0),(0,y')) = 0$
— (E'', b'', f'') est un espace α-semiquadratique.

Calculer $b''((x,x'),(y,y'))$ pour tous x, y de E et tous x', y' de E'.

L'espace α-semiquadratique (E'', b'', f'') sera appelé **produit orthogonal** de $\mathcal{E}$ et de $\mathcal{E}'$ et noté $\mathcal{E} \times \mathcal{E}'$.

7) Soit $\mathcal{E} = (E, b, f)$ un espace α-semiquadratique. Soit F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que b est non dégénérée sur F. Soient b_0 et f_0 les restrictions de b et f à F, b_1 et f_1 les restrictions de b et f à $F^{\perp}$, et b_2 et f_2 les restrictions de b et f à ${}^{\perp}F$. Montrer que $\mathcal{F} = (F, b_0, f_0)$, $\mathcal{F}^{\perp} = (F^{\perp}, b_1, f_1)$ et ${}^{\perp}\mathcal{F} = ({}^{\perp}F, b_2, f_2)$ sont des espace α-semiquadratiques. Montrer que $\mathcal{E}$ est isomorphe au produit orthogonal de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{F}^{\perp}$, ainsi qu'au produit orthogonal de ${}^{\perp}\mathcal{F}$ et de $\mathcal{F}$.

8) Soient $\mathcal{E} = (E, b, f)$ et $\mathcal{E}' = (E', b', f')$ deux espaces α-semiquadratiques. Soient e et e' leurs vecteurs centre et λ et λ' leurs poids. Déterminer le vecteur centre du produit orthogonal $\mathcal{E}''$ de $\mathcal{E}$ et de $\mathcal{E}'$. Montrer que le poids de $\mathcal{E}''$ est égal à $\lambda\lambda'$.

9) Soit $\mathcal{E} = (E, b, f)$ un espace α-semiquadratique. Soit F le noyau de f. Montrer que b est non dégénérée sur F si et seulement si le poids de $\mathcal{E}$ est différent de 1 ou si $\mathcal{E}$ est de type T0.

Montrer que $i\overline{\alpha}b$ est une forme symétrique sur F.

Si $\mathcal{E} = (E, b, f)$ est un espace α-semiquadratique, on appellera **pseudo-signature de $\mathcal{E}$** le nombre $ps(\mathcal{E}) = \sigma(\mathrm{Ker} f, i\overline{\alpha}b)$.

10) Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux espaces α-semiquadratiques. On suppose que $\mathcal{E}$ ou $\mathcal{E}'$ est de type T0. Déterminer la pseudo-signature de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}'$ en fonction des pseudo-signatures de $\mathcal{E}$ et de $\mathcal{E}'$.

11) Soit $\mathcal{E} = (E, b, f)$ un espace α-semiquadratique de type T1. Soient E_1

Tournez la page S.V.P.

et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que : $E = E_1 \oplus E_2$. On suppose que E_2 est l'orthogonal à droite de E_1, et que f n'est nulle ni sur E_1 ni sur E_2.

a) Montrer que les restrictions de b et de f induisent sur E_1 et E_2 deux structures d'espaces α-semiquadratiques de type T1 que l'on notera $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$.

b) Soient e_1 et e_2 les vecteurs centre de $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$. Soit F le noyau de f. Soient F_1 et F_2 les intersections de F avec E_1 et E_2. Montrer l'inclusion :

$$F \cap (F_1 \oplus F_2)^\perp \subset \mathbf{C}e_1 \oplus \mathbf{C}e_2.$$

En déduire que l'intersection de F et de $(F_1 \oplus F_2)^\perp$ est engendrée par e_1 et e_2 si les poids de $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont égaux à 1, et par $f(e_2)e_1 - f(e_1)e_2$ sinon.

c) Soient λ, λ_1 et λ_2 les poids de $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$. Montrer que le nombre $ps(\mathcal{E}) - ps(\mathcal{E}_1) - ps(\mathcal{E}_2)$ est égal à 1, 0 ou -1 suivant que $\Im\lambda_1 + \Im\lambda_2 - \Im\lambda$ est strictement positif, nul ou strictement négatif.

Indication : On pourra utiliser les résultats de la première partie.

Soit $\mathcal{E} = (E, b, f)$ un espace α-semiquadratique. Soit λ son poids. Si $\lambda = 1$ on pose : $\sigma(\mathcal{E}) = ps(\mathcal{E})$, sinon on pose :

$$\sigma(\mathcal{E}) = ps(\mathcal{E}) + 1 - \frac{\mathrm{Arg}\lambda}{\pi}.$$

Le nombre $\sigma(\mathcal{E})$ sera appelé signature de $\mathcal{E}$.

12) Soit $\mathcal{E}$ un espace α-semiquadratique de dimension n et de signature σ. Soit λ son poids et s sa pseudo-signature. Montrer que λ est égal à 1 si et seulement si $\sigma - n$ est un entier pair. En déduire les formules :

$$\lambda = e^{i\pi(n-\sigma)}$$

$$s = \begin{cases} \sigma & \text{si } \sigma - n \in 2\mathbf{Z} \\ n + 1 + 2\left[\frac{\sigma - n}{2}\right] & \text{sinon} \end{cases}$$

13) On reprend la situation de la question 11, avec les mêmes notations. On pose $\lambda_1 = e^{i\beta}$ et $\lambda_2 = e^{i\gamma}$, avec $0 \le \beta < 2\pi$ et $0 \le \gamma < 2\pi$. On pose $k = 1, 2$ ou 3 suivant que $\beta + \gamma - 2\pi$ est strictement négatif, nul ou strictement positif.

Calculer $\sigma(\mathcal{E}) - \sigma(\mathcal{E}_1) - \sigma(\mathcal{E}_2) - (ps(\mathcal{E}) - ps(\mathcal{E}_1) - ps(\mathcal{E}_2))$ en fonction de β, γ et k. En déduire que $\sigma(\mathcal{E})$ est égal à $\sigma(\mathcal{E}_1) + \sigma(\mathcal{E}_2)$.

Montrer que la signature d'un produit orthogonal de deux espaces α-semiquadratiques est la somme de leurs signatures.

14) Soit σ un élément de l'intervalle $[-1, 1]$. Montrer qu'il existe un espace α-semiquadratique $\mathcal{E}$ de dimension 1 et de signature σ.

Soit σ un réel et n un entier. Montrer qu'il existe un espace α-semiquadratique de dimension n et de signature σ si et seulement si $|\sigma| \le n$.

15) Montrer que deux espaces α-semiquadratiques $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension, même type et même signature.

IV Le cas des corps finis

On étend, dans cette partie, les définitions concernant des espaces α-semiquadratiques en considérant des espaces vectoriels sur un corps fini (au lieu du corps des complexes), en prenant $\alpha = 2$ et $\varepsilon = -1$ et en considérant l'application identique à la place de la conjugaison.

On considère ainsi un nombre premier p impair et on note $\mathbf{F}_p$ le corps fini à p éléments. On appellera espace **semiquadratique** un triplet (E, b, f) où E est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{F}_p$, b une forme bilinéaire sur E **non dégénérée** et f une forme linéaire sur E et tel que l'on ait :

$$\text{(SQ)} \qquad \forall x \in E, \forall y \in E \quad b(x,y) + b(y,x) = 2f(x)f(y).$$

On pourra abréger l'expression semiquadratique en l'expression SQ.

Un espace semiquadratique (E, b, f) sera dit de **type T0** si f est nul et de **type T1** sinon.

Soient $\mathcal{E} = (E, b, f)$ et $\mathcal{E}' = (E', b', f')$ deux espaces semiquadratiques. On appellera **isomorphisme** de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}'$ une application linéaire bijective φ de E sur E' ayant les propriétés suivantes :

$$\forall x \in E \quad f'(\varphi(x)) = f(x)$$

$$\forall x \in E, \forall y \in E \quad b'(\varphi(x), \varphi(y)) = b(x,y).$$

On dira que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}'$.

Comme dans le cas complexe, un espace semiquadratique $\mathcal{E} = (E, b, f)$ possède un **vecteur centre** e et un **poids** λ. Ils sont définis par :

$$\forall x \in E \quad b(x,e) = f(x) \quad \text{et} \quad f(e) = \frac{1-\lambda}{2}.$$

Si $\mathcal{E} = (E, b, f)$ et $\mathcal{E}' = (E', b', f')$ sont deux espaces semiquadratiques, on peut aussi définir leur **produit orthogonal** $\mathcal{E}'' = \mathcal{E} \times \mathcal{E}'$. C'est un espace semiquadratique de la forme $\mathcal{E}'' = (E \times E', b'', f'')$, b'' et f'' étant caractérisés par les formules de la question III.6.

1) Soit $\mathcal{E} = (E, b, f)$ un espace semiquadratique de dimension 1 et de poids -1. Soit e le vecteur centre de $\mathcal{E}$. Montrer que l'on a : $f(e) = b(e,e) = 1$.

En déduire qu'il existe un espace semiquadratique de dimension 1 et de poids -1 et que deux tels espaces sont isomorphes.

Pour tout entier $n > 0$ on désignera par E_n l'espace vectoriel standard $\mathbf{F}_p^n$ de dimension n, et on notera $\{e_1, \dots, e_n\}$ sa base canonique. La forme linéaire sur E_n qui envoie chaque e_i en 1 sera notée f.

Si m et r sont des entiers positifs ou nul, on désignera par T_r l'application de E_m dans E_{r+m} qui envoie tout vecteur e_i en e_{r+i}.

2) Montrer qu'il existe une unique forme bilinéaire b sur E_n telle que :
— $\forall i \leq n \quad b(e_i, e_i) = 1$
— $\forall i < j \leq n \quad b(e_i, e_j) = 0$
— $\mathcal{E}_n = (E_n, b, f)$ est un espace semiquadratique.
Calculer $b(e_i, e_j)$ pour $i > j$.

On notera G_n le groupe d'automorphismes de $\mathcal{E}_n$. C'est l'ensemble des isomorphismes de $\mathcal{E}_n$ sur lui-même, muni de la composition. On conviendra que $\mathcal{E}_0$ est l'espace semiquadratique trivial $(0,0,0)$ et que G_0 est le groupe trivial.

3) Soient n et m deux entiers positifs ou nuls . Montrer que $\mathcal{E}_{n+m}$ est isomorphe au produit orthogonal de $\mathcal{E}_n$ et de $\mathcal{E}_m$. En déduire un morphisme de groupes de $G_n \times G_m$ dans G_{n+m}. Ce morphisme sera noté $(g, g') \mapsto g \times g'$.
Déterminer $(g \times g')(e_i)$ pour tout $i \leq n+m$.
Montrer que si n, m et q sont trois entiers naturels, on a :

$$\forall g \in G_n, \forall g' \in G_m, \forall g'' \in G_q \quad (g \times g') \times g'' = g \times (g' \times g'').$$

Cet automorphisme sera noté : $g \times g' \times g''$.

4) Déterminer le vecteur centre de $\mathcal{E}_n$.

5) Montrer qu'il existe un unique automorphisme τ de $\mathcal{E}_2$ qui envoie e_1 en e_2. Montrer la formule : $\tau(e_2) = -e_1 + 2e_2$.

6) Soit $n > 1$ un entier. Pour tout entier i, $0 < i < n$, on note τ_i l'automorphisme $1_{i-1} \times \tau \times 1_{n-i-1}$ de G_n, 1_k désignant l'élément neutre du groupe G_k.
Montrer les formules suivantes :

$$\forall i, j, |i-j| > 1 \quad \Rightarrow \quad \tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i$$

$$\forall i, j, |i-j| = 1 \quad \Rightarrow \quad \tau_i \tau_j \tau_i = \tau_j \tau_i \tau_j$$

On notera Γ_n le sous-groupe de G_n engendré par les automorphismes τ_i, i variant de 1 à $n-1$.

7.a) Déterminer, en fonction de p, l'ordre du groupe Γ_2.
b) Montrer que les vecteurs fixes de E_2 sous l'action de Γ_2 sont exactement les vecteurs de $\mathbf{F}_p e$, e étant le vecteur centre de $\mathcal{E}_2$.
c) En déduire quelles sont les orbites de E_2 sous l'action de Γ_2 et sous l'action de G_2.
d) Montrer que Γ_2 est égal à G_2.

8) Soit $n > 1$ un entier. Soit x un vecteur de E_n qui n'est pas colinéaire au vecteur centre. Montrer qu'il existe un élément γ de Γ_n tel que $\gamma(x)$ soit égal à $f(x)e_1$ si $f(x) \neq 0$ et à $e_1 - e_2$ sinon.

Indication : on pourra procéder par récurrence.

9) Montrer que, pour tout $n > 0$, G_n est égal à Γ_n.

Soit $n > 1$ un entier. Soit Σ_n l'ensemble des vecteurs x de E_n qui ne sont pas colinéaires au vecteur centre de $\mathcal{E}_n$ et tels que $f(x) = 1$. Montrer que Γ_n et G_n agissent transitivement sur Σ_n. Calculer le cardinal de Σ_n.

10) Soit $n > 1$ un entier. Déterminer le stabilisateur du vecteur e_n de E_n sous l'action du groupe G_n. Calculer l'ordre de G_n en fonction de l'ordre de G_{n-1}. En déduire l'ordre de G_n.

11) Soient x et y deux vecteurs de Σ_3 (Σ_3 est défini dans la question 9). Montrer que la relation $\equiv$ définie par :

"$x \equiv y$ si et seulement si les vecteurs e, x, y forment un système lié"

est une relation d'équivalence sur Σ_3.

Déterminer le nombre de classes d'équivalence de $\equiv$ et le nombre d'éléments de chacune d'entre elles.

12) Construire un morphisme de groupe φ de G_3 dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_{p+1}$, tel que le noyau de φ soit un groupe d'ordre 2 que l'on déterminera.

Montrer que $\varphi(G_3)$ est contenu dans le groupe alterné $\mathfrak{A}_{p+1}$.

13) Montrer que le groupe $\varphi(G_3)$ est isomorphe au groupe alterné $\mathfrak{A}_4$ lorsque $p = 3$ et au groupe alterné $\mathfrak{A}_5$ lorsque $p = 5$.